X=0 ve X_i=1 Yüklemeleri

X=0 Yüklemesi :

İzostatik esas sisteme (İES) yalnız dış yükler etkitilir, (*tüm hiperstatik bilinmeyenler yani $X_i=0,\ i=1,2,...,n$*). Bu durumda meydana gelen kesit zorları M_0, N_0, T_0 ile gösterilir.

X_i=1 Yüklemesi :

İzostatik esas sisteme yalnız i sayılı X_i hiperstatik bilinmeyeninin birim değeri etkitilir, (*tüm dış etkiler ve X_i dışında kalan tüm hiperstatik bilinmeyenler sıfırdır*). Bu durumda meydana gelen kesit zorları M_i, N_i, T_i ile gösterilir. Bir hiperstatik sistemin hesabında hiperstatiklik derecesi kadar (i=1,2,3,........,n) birim yükleme yapılır.

Süperpozisyon Denklemleri

Hiperstatik sistemde dış etkilerden meydana gelen büyüklükler (kesit zorları, mesnet tepkileri, yerdeğiştirmeler v.b.) ***İzostatik esas sistemde dış etkilerden ve hiperstatik bilinmeyenlerden meydana gelen büyüklüklerin toplamına eşittir.***

X_i (i=1,2,3,..n)	Hiperstatik bilinmeyenler
M_0, N_0, T_0, R_0	X=0 yüklemesinden meydana gelen kesit zorları ve meset tepkileri
M_i, N_i, T_i, R_i	X_i=1 yüklemesinden meydana gelen kesit zorları ve meset tepkileri

olmak üzere n. dereceden hiperstatik sistem için süperpozisyon denklemleri;

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + M_nX_n \\
N &= N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + N_nX_n \\
T &= T_0 + T_1X_1 + T_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + T_nX_n \\
R &= \underbrace{R_0}_{\text{Dış etkilerden}} + \underbrace{R_1X_1 + R_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + R_nX_n}_{\text{Hiperstatik bilinmeyenlerden}}
\end{aligned}
$$

olarak yazılır.

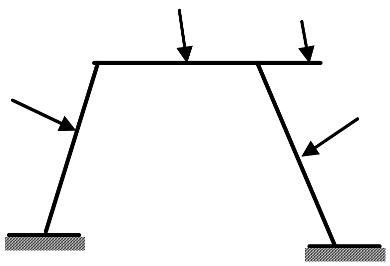
Geometrik Uygunluk Koşulları (Süreklilik Denklemleri)

Hiperstatik sistemin kesim yapılan noktalarındaki geometrik uygunluk koşullarını ifade eden denklemlere ***süreklilik denklemleri*** denilmektedir.

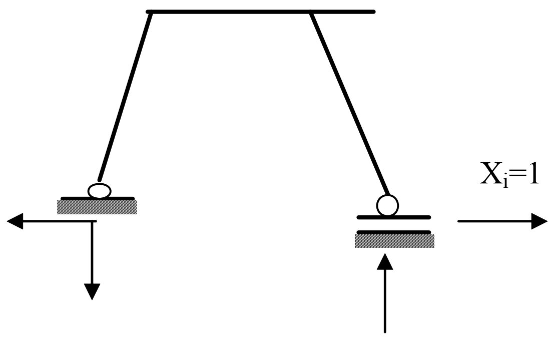
Bir hiperstatik sistemde hiperstatiklik derecesi kadar süreklilik denklemi yazılabilir. Süreklilik denklemlerinin yazılması için ***Virtüel İş Teoreminden*** yararlanılır.

(i) Sayılı Süreklilik Denkleminin Yazılması

Sistemde dış etki olarak yalnız dış yüklerin bulunması hali incelenecek, sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmeleri etkileri daha sonraya bırakılacaktır.



Hiperstatik Sistem
(Virtüel Şekildeğiştirme Durumu)



İzostatik Sistemde X_i=1 Durumu
(Yükleme Durumu)

	Hiperstatik Sistem (Dış Yükler)	İzostatik Esas Sistem (X_i=1 Durumu)
Kesit Zorları :	M, N, T	M_i, N_i, T_i
Şekildeğiştirmeler :	$\frac{\Delta\varphi}{ds}=\frac{M}{EI}$ $\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{N}{EF}$ $\frac{\Delta v}{ds}=\frac{T}{GF'}$	

Virtüel İş Teoremi: $\boxed{\text{İç Kuvvetlerin İşi = Dış Kuvvetlerin İşi}}$

$$\int M_i \frac{\Delta\varphi}{ds} ds + \int N_i \frac{\Delta ds}{ds} ds + \int T_i \frac{\Delta v}{ds} ds =$$

$$\int M_i M \frac{ds}{EI} + \int N_i N \frac{ds}{EF} + \int T_i T \frac{ds}{GF'} = 0 \qquad (i = 1,2,3,.........n)$$

Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD)

M, N, T nin süperpozisyon denklemlerindeki ifadeleri yerine konarak denklem yeniden düzenlenirse,

$$\int M_i(M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots\cdots + M_nX_n)\frac{ds}{EI} +$$
$$\int N_i(N_0 + N_1X_1 + N_2X_2 + \cdots\cdots + N_nX_n)\frac{ds}{EF} +$$
$$\int T_i(T_0 + T_1X_1 + T_2X_2 + \cdots\cdots + T_nX_n)\frac{ds}{GF'} = 0 \qquad (i = 1,2,3,.........n)$$

$$\int M_iM_0\frac{ds}{EI} + X_1\int M_iM_1\frac{ds}{EI} + \cdots\cdots + X_n\int M_iM_n\frac{ds}{EI} +$$
$$\int N_iN_0\frac{ds}{EF} + X_1\int N_iN_1\frac{ds}{EF} + \cdots\cdots + X_n\int N_iN_n\frac{ds}{EF} +$$
$$\underbrace{\int T_iT_0\frac{ds}{GF'}}_{\delta_{10}} + X_1\underbrace{\int T_iT_1\frac{ds}{GF'}}_{\delta_{i1}} + \cdots\cdots + X_n\underbrace{\int T_iT_n\frac{ds}{GF'}}_{\delta_{in}} = 0$$

$$\delta_{i0} + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots\cdots + \delta_{in}X_n = 0 \qquad (i = 1,2,........n)$$

Bu denklem sistemi, i=1,2 ......n için açık olarak yazılırsa **Açık Süreklilik Denklemleri** elde edilir.

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots\cdots + \delta_{1n}X_n = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots\cdots + \delta_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots\cdots + \delta_{nn}X_n = 0 \end{array}}$$

Açık Süreklilik Denklemleri

<u>Açık Süreklilik Denkleminde Katsayılar ve Sabitler:</u>

δij : X_j=1 yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyeninin uygulama noktasının X_i bilinmeyeni doğrultusundaki yerdeğiştirmesidir. Bu katsayılar, ***denklem takımının katsayıları*** adını alır.

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} + \int N_i N_j \frac{ds}{EF} + \int T_i T_j \frac{ds}{GF'}$$

Betti karşıtlık teoremi gereğince $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ bağıntısı vardır, yani katsayılar matrisi simetriktir. Buna göre n. Dereceden hiperstatik bir sistemin hesabında tayin edilmesi gereken katsayıların sayısı n^2 yerine $\frac{n}{2}(n+1)$ olmaktadır.

δ_{i0} : X=0 yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyeninin uygulama noktasının X_i bilinmeyeni doğrultusundaki yerdeğiştirmesidir. Bu katsayılar, denklem takımının ***yük sabitleri*** adını alır.

$$\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{ds}{EI} + \int N_i N_0 \frac{ds}{EF} + \int T_i T_0 \frac{ds}{GF'}$$

n. Dereceden hiperstatik bir sistemin hesabında tayin edilmesi gereken yük sabitlerinin sayısı (n) dir.

Uygulamada genellikle uzama ve kayma şekildeğiştirmeleri, eğilme şekildeğiştirmelerinin yanında ihmal edilebilir mertebededir. Bu durumda δ_{ij} , δ_{i0} katsayıları daha basit bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\boxed{\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \quad , \quad \delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{ds}{EI}}$$

Uygulama: 3. Dereceden hiperstatik bir sistemde açık süreklilik denklemleri:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{31}X_3 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$
$$\delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

Bu denklemler, matris formunda yeniden düzenlenirse,

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix} = 0$$

halini alır.

Hesaplanması gereken terimlerin sayısı:

Denklem takımının katsayıları : $\frac{n}{2}(n+1) = \frac{3}{2}(3+1) = 6$ adet

δ_{11}, $\delta_{12}=\delta_{21}$, $\delta_{13}=\delta_{31}$, δ_{22}, $\delta_{23}=\delta_{32}$, δ_{33}

Yük Sabitleri : n=3 adet
δ_{10} , δ_{20}, δ_{30}

olmak üzere toplam 9 adettir.

Hiperstatik Kafes Sistemler

Kafes sistemlerde M≡T≡0 olduğu için sadece normal kuvvetler (çubuk kuvvetleri) sözkonusudur.

S_0	İES de X=0 yüklemesinden meydana gelen çubuk kuvvetleri
S_i	İES de X_i=1 yüklemesinden meydana gelen çubuk kuvvetleri

olmak üzere, δ_{ij} , δ_{i0} katsayıları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\boxed{\delta_{ij} = \sum_{çubuk} S_i S_j \frac{l}{EF} \qquad \delta_{i0} = \sum_{çubuk} S_i S_0 \frac{l}{EF}}$$

Hesapta İzlenecek Yol

1. Hiperstatiklik derecesi belirlenir, izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.

2. X=0 yüklemesi yapılarak M_0, N_0, T_0 diyagramları çizilir. (Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin terk edilmesi durumunda N_0 ve T_0 diyagramlarının çizilmesine gerek yoktur)

3. X_i=1 yüklemesi yapılarak M_i, N_i, T_i diyagramları çizilir. Bu işlem i=1,2,........n kez (hiperstatiklik derecesi kadar) tekrarlanır. (Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin terk edilmesi durumunda N_i ve T_i diyagramlarının çizilmesine gerek yoktur)

4. Denklem takımının δ_{ij} katsayıları ve δ_{i0} yük sabitleri hesaplanır. Bu terimlerin hesabı için çarpım tablolarından yararlanılır.

Uygulamada, paydadaki EI çarpanından kurtulmak için denklem takımının bütün terimleri EI_c ile çarpılarak δ_{ij} ve δ_{i0} yerine $EI_c\delta_{ij}$ ve $EI_c\delta_{i0}$ terimleri hesaplanır.

$$EI_c\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds \quad , \quad EI_c\delta_{i0} = \int M_i M_0 \frac{I_c}{I} ds$$

Burada I_c herhangi bir atalet momentidir ve genellikle çubukların atalet momentlerinin en küçük ortak katı olarak seçilir. Görüldüğü gibi, bir hiperstatik sistemin dış yükler için hesabında, atalet momentlerinin oranlarının verilmesi gerekli ve yeterlidir.

5. Denklem takımı kurulur ve çözülerek X_1, X_2, ...X_n hiperstatik bilinmeyenleri belirlenir.

6. Kesit zorları diyagramları çizilir. Bu işlem için iki yoldan yararlanılabilir.

   a) Süperpozisyon denklemleri ile: $M=M_0+M_1X_1+M_2X_2+.....M_nX_n$
   b) Dış yükler ve hiperstatik bilinmeyenler izostatik esas siteme yüklenerek

   Not: Eğilme momenti diyagramının süperpozisyon ile çizilmesinden sonra, kesme kuvveti diyagramının çubuk denge denklemleri ile, normal kuvvet diyagramının ise düğüm noktası denge denklemleri ile çizilmesi daha uygun olmaktadır.

7. Sonuçlar kontrol edilir. Bunun için Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) kullanılır. Hiperstatik sistemin M, N, T diyagramlarının

$$\int M_i M \frac{ds}{EI} + \int N_i N \frac{ds}{EF} + \int T_i T \frac{ds}{GF'} = 0 \qquad (\mathrm{i} = 1,2,3,.........\mathrm{n})$$

kapalı süreklilik denklemlerini %0.5-%1.0 rölatif hata ile sağlaması gerekmektedir.

Uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin terk edilmesi halinde

$$\int M M_i \frac{ds}{EI} = 0 \quad \text{veya} \quad \int M M_i \frac{I_c}{I} ds = 0 \quad (\mathrm{i} = 1,2,3,.........\mathrm{n})$$

yazılması yeterlidir. Bu kontrol n adet kapalı süreklilik denklemi için tekrar edilmelidir.

$$R\ddot{o}latif\ \ Hata = \frac{(+)Terimlerin\ \ Toplamı - (-)Terimlerin\ \ Toplamı}{(+)\ ve\ (\text{-})\ Terimlerin\ Toplamlarının\ Ortalaması}$$

<u>İzostatik Esas Sistem Seçilmesinde Dikkat Edilecek Noktalar</u>

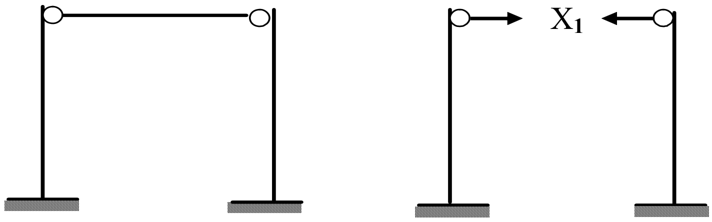
Bir hiperstatik sistemden çok sayıda esas sistem seçilebilmektedir. İES seçilirken dikkat edilecek en önemli nokta, seçilen sistemin ***oynak olmamasıdır***. D

1. İçten hiperstatik sistemlerde mutlaka kesit zoru kaldırılmalıdır.
2. Dıştan hiperstatik sistemlerde, mesnet tepkileri ve/veya kesit zoru kaldırılarak İES elde edilebilir.
3. İçten ve dıştan hipersataik sistemlerde en az içten hiperstatiklik derecesi kadar kesit zoru kaldırılmalıdır.

4. Kesit zorlarının kaldırılması halinde birim yüklemeler birbirine eşit şiddette ve zıt yönlü moment çifti ve/veya kuvvet çiftidir.
5. $X=0$ ve $X_i=1$ birim yükleme diyagramları kolay çizilebilmeli, sistem üzerinde fazla dallanmamalı ve ordinatları mertebe olarak birbirinden çok farklı olmamalıdır.

- İzostatik esas sistemin basit kiriş, basit çerçeve veya bunların birleşmesinden oluşan bir sistem olması sağlanmalıdır.
- Bazı özel haller dışında genel olarak büyük konsollu sistemlerden kaçınılmalıdır.

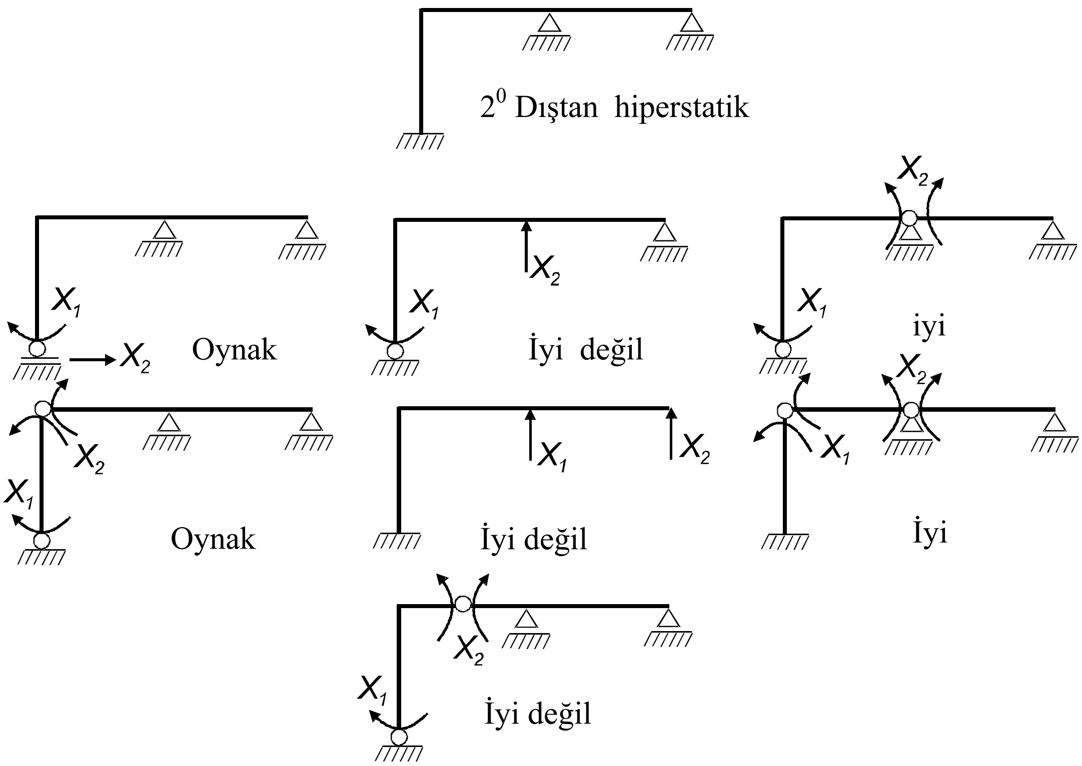
Özel Hal:

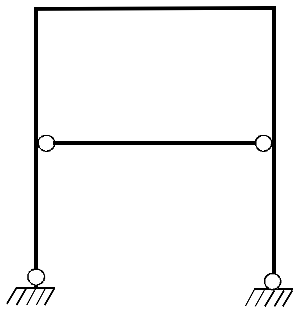


Hiperstatik Sistem İzostatik Esas Sistem

- Üç mafsallı çerçeve, gerber kirişi gibi M_0 ve M_i diyagramları daha zor çizilen sistemlerden kaçınılmalıdır.

Örnekler:





1^0 İçten
1^0 Dıştan
2^0 Hiperstatik sistem