HİPERSTATİK SİSTEMLER

Tanım: Bütün mesnet tepkilerinin, kesit zorlarının, bunlara bağlı olarak şekildeğiştirmelerin ve yerdeğiştirmelerin yalnızca denge denklemleri yardımı ile hesaplanamadığı sistemlere ***Hiperstatik Sistemler*** denir.

Hiperstatik sistemlerin hesabı için,

a) Denge denklemlerine,
b) İç kuvvet-şekildeğiştirme bağıntılarına

$$\frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d}$$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon\ t$$

$$\frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'}$$

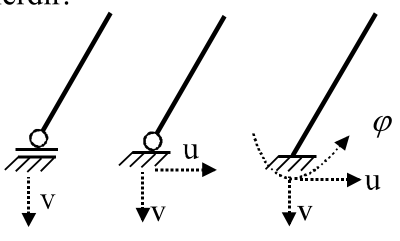
c) Geometrik uygunluk koşullarına (süreklilik denklemlerine)

ihtiyaç vardır.

Dış Etkiler: Bir hiperstatik sistemde kesit zoru, şekildeğiştirme ve yerdeğiştirme meydana getiren dış etkilerin başlıcaları şunlardır;

a) Dış Yükler
b) Sıcaklık değişmesi
   - Düzgün sıcaklık değişmesi (t)
   - Farklı sıcaklık değişmesi (Δt)
c) Mesnet Çökmeleri

   Tanım: Mesnetlerde meydana gelen ve mesnedin tanımına uygun olmayan yerdeğiştirmelerdir.



u,v : Doğrulsal (lineer) mesnet çökmeleri,
φ : Açısal mesnet çökmesi

d) Rötre (negatif işaretli düzgün sıcaklık değişmesine eşdeğer kabul edilir)
e) İlkel kusurlar
f) Ön germe kuvvetleri, v.b.

İzostatik sistemlerde sıcaklık değişmesi, rötre, ve mesnet çökmeleri gibi etkilerden kesit zoru meydana gelmediği halde hiperstatik sistemlerde bu etkilerden dolayı kesit zorları meydana gelir.

<u>Hiperstatik Sistemlerde Hesap Yöntemleri</u>

1. Kuvvet Yöntemi (sürekli kirişlerde Clapeyron Denklemleri)
2. Deplasman (yerdeğiştirme) yöntemleri :
   - Açı Yöntemi
   - Cross Yöntemi
   - Kani Yöntemi
   - Sabit Noktalar Yöntemi
3. Başlangıç değerleri yöntemi (Travers Yöntemi)

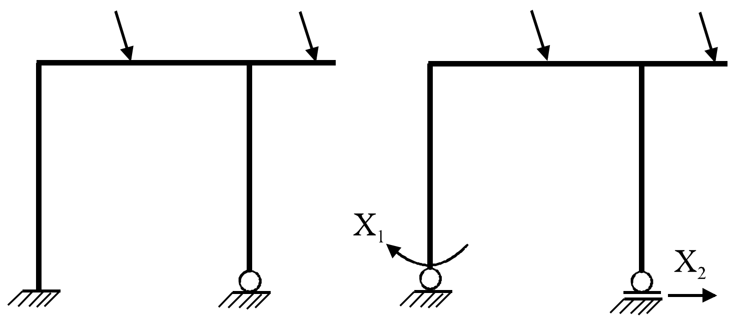
KUVVET YÖNTEMİ

<u>Tanımlar</u>

İzostatik Esas Sistem, (İES): Bir hiperstatik sistemde kesimler yapılarak bazı kesit zorları ve/veya mesnet tepkilerinin kaldırılması ile elde edilen taşıyıcı ve izostatik sisteme denir. Bir hiperstatik sistemden çok sayıda izostatik sistem elde edilebilir. Kuvvet yönteminde hesaplar, referans sistem olarak seçilen bir İES üzerinde yürütülerek hiperstatik sistemin çözümü elde edilir.

Hiperstatik Bilinmeyen, Hiperstatiklik Derecesi: Hiperstatik sistemde yapılan kesimlerle kaldırılan kesit zorları ve/veya mesnet tepkilerine Hiperstatik Bilinmeyen, bunların sayısına ise hiperstatiklik derecesi denir. Hiperstatiklik derecesi, bir hiperstatik sistemin bütün mesnet tepkileri ve iç kuvvetlerinin hesaplanabilmesi için denge denklemlerine ilave edilmesi gereken denklemlerin (süreklilik denklemleri) sayısını vermektedir.

<u>Uygulama:</u>



Hiperstatik Sistem İzostatik Esas Sistem

Hiperstatiklik Derecesi : 2

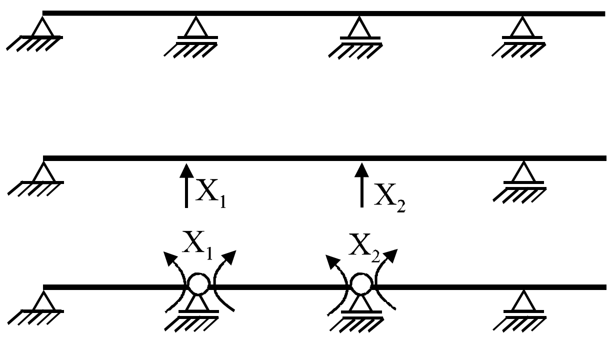
Hiperstatik Bilinmiyenler: X_1, X_2

Hiperstatik Sistemlerin Hiperstatik Bilinmeyenlerin Tipine Göre Sınıflandırılması

- **Dıştan Hiperstatik Sistem**

Bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için yalnız mesnet tepkilerinin kaldırılması yeterli oluyorsa, bu sisteme **Dıştan Hiperstatik Sistem** denir.

Dıştan hiperstatik sistemleri izostatik hale getirmek için mesnet tepkisi ve/veya kesit zoru kaldırılabilir. Kesit zoru kaldırılması halinde hiperstatik bilinmeyen birbirine eşit şiddette ve zıt yönlü moment çifti ve/veya kuvvet çiftidir.

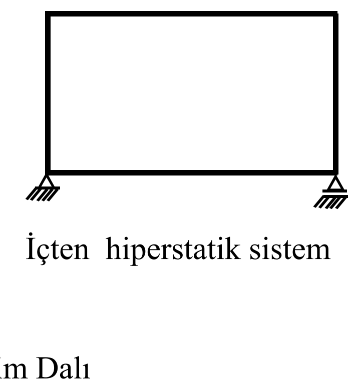


2^0 dıştan hiperstatik sürekli kiriş

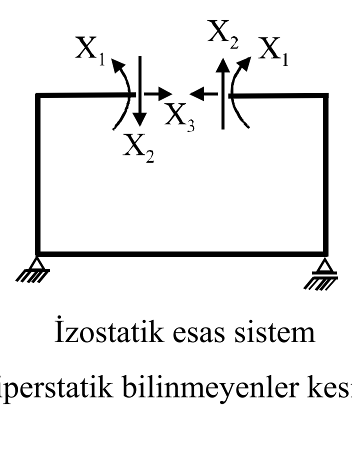
İES (1- hiperstatik bilinmeyenler mesnet tepkisi
2- hiperstatik bilinmeyenler kesit zoru)

- **İçten Hiperstatik Sistem**

Bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için yalnız kesit zoru kaldırmak gerekiyorsa, bu tür hiperstatik sisteme **İçten Hiperstatik Sistem** denir.



İçten hiperstatik sistem



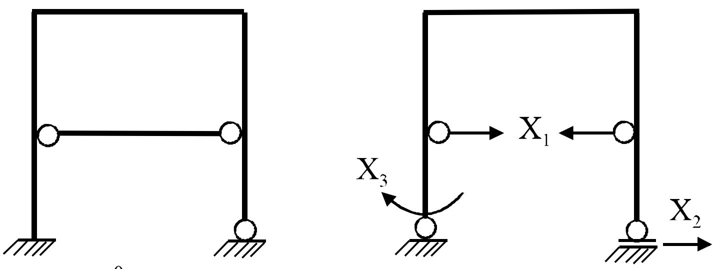
İzostatik esas sistem

(hiperstatik bilinmeyenler kesit zorları)

- **İçten ve Dıştan Hiperstatik Sistem**

Bir hiperstatik sistemi izostatik hale getirmek için hem kesit zoru hem de mesnet tepkisi kaldırmak gerekiyorsa, bu tür hiperstatik sisteme **İçten ve Dıştan Hiperstatik Sistem** denir.

Bu tür sistemlerde en az içten hiperstatiklik derecesi kadar kesit zoru kaldırılmalıdır.



2^0 Dıştan
1^0 İçten Hip. Sis.

izostatik esas sistem
(2 mesnet tepkisi + 1 kesit zoru)

<u>**Hiperstatiklik Derecesinin Belirlenmesi**</u>

Düzlem bir hiperstatik bir sistemin hiperstatiklik derecesinin belirlenmesinde, aşağıda verilen formülden yararlanılabilir.

$n = 3k + r - 3 - m$

Burada,

n : *hiperstatiklik derecesi*
k : *sistemdeki kapalı göz sayısı*
r : *toplam mesnet tepkisi sayısı*
m : *toplam ara mafsal sayısı* (*mafsal koşulu sayısı*)

olarak alınacaktır.

Hiperstatik Kafes Sistemler:

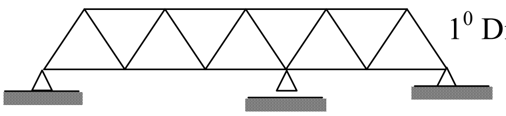
Kafes sistemlerde kesit zoru olarak sadece çubuk kuvvetleri bulunduğundan, izostatik esas sitem, sistemin içten ve/veya dıştan hiperstatik olmasına göre, mesnet tepkileri ve/veya çubuk kuvvetleri kaldırılarak seçilebilir.
Hiperstatik kafes sitemlerde hiperstatiklik derecesi,
r : mesnet tepkisi sayısı ,
ç: çubuk sayısı,

d: düğüm noktası sayısı

olmak üzere

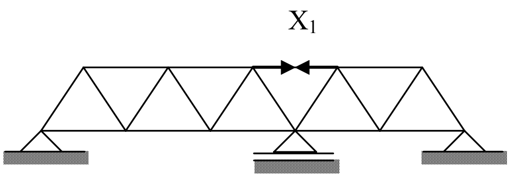
$$n = \underbrace{r + ç}_{\text{bilinmeyenler}} - \underbrace{2d}_{\substack{\text{denge}\\ \text{denklemleri}}}$$ formülü ile belirlenebilir.

Örnek:

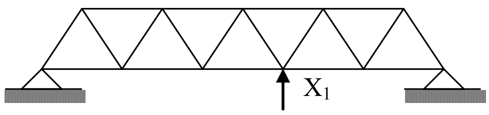


1^0 Dıştan Hiperstatik

r=4, ç=11, d=7 *n=4+11-2*7=1* (dıştan hiperstatik)



İzostatik esas sistem 1



İzostatik esas sistem 2

<u>Kuvvet Yönteminin Prensibi:</u>

Kuvvet Yönteminin dayandığı iki önemli kavram söz konusudur.

- **Süperpozisyon Prensibi**

  Hiperstatik sistemde dış etkilerden meydana gelen kesit zorları, şekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmeler ;

  İzostatik esas sistemde, a)dış etkilerden

  b) hiperstatik bilinmeyenlerden

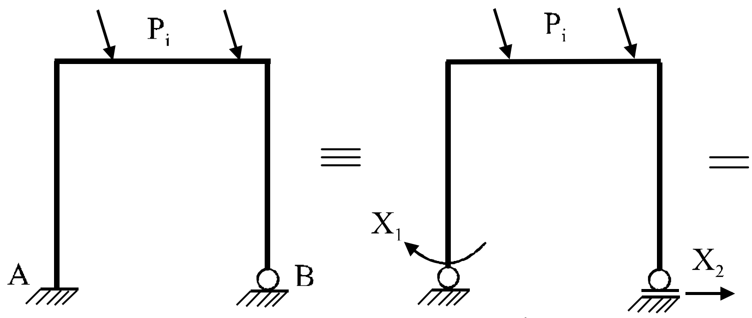
  oluşan kesit zorları, sekildeğiştirmeler ve yerdeğiştirmelerin toplamına eşittir.

- **Süreklilik Denklemleri**

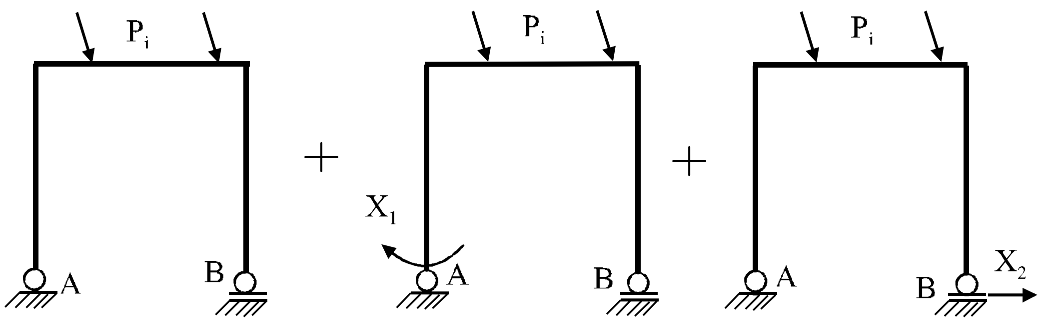
Hiperstatik bilinmeyenler, sistemin kesim yapılan noktalarındaki geometrik uygunluk koşullarını ifade eden denklemlerden yararlanarak belirlenir.

Uygulama:

1- Süperpozisyon prensibi:



Hiperstatik Sistem İES



Dış yükler X_1 Yüklemesi X_2 Yüklemesi

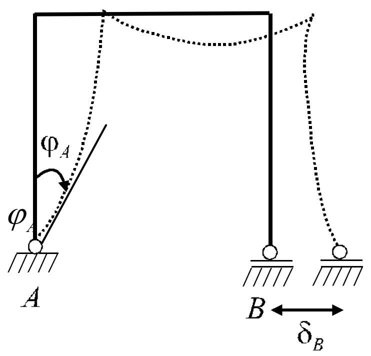
2- Süreklilik Denklemleri (Geometrik uygunluk koşulları):

Verilen hiperstatik sistemin mesnetlerindeki geometrik uygunluk koşulları :

A mesnedindeki dönme sıfırdır. $\varphi_A=0$,

B mesnedindeki yatay yerdeğiştirme sıfırdır. $\delta_B=0$

Hiperstatik sistemin hesaplanabilmesi için X_1, X_2 hiperstatik bilinmeyenlerinin belirlenmesi gereklidir. Bu bilinmeyenlerin hesaplanması için A ve B mesnetlerinde yukarıda ifade edilen ($\varphi_A=0$, $\delta_B=0$) geometrik uygunluk koşullarından yararlanılır.



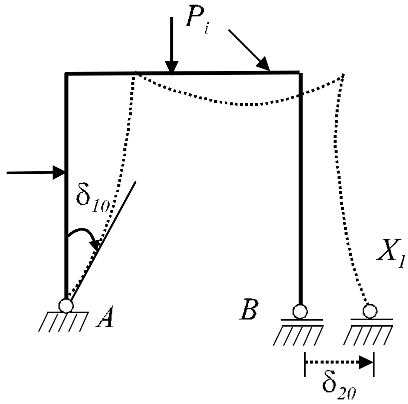
A mesnedindeki dönme φ_A

B mesnedindeki yatay hareket δ_B

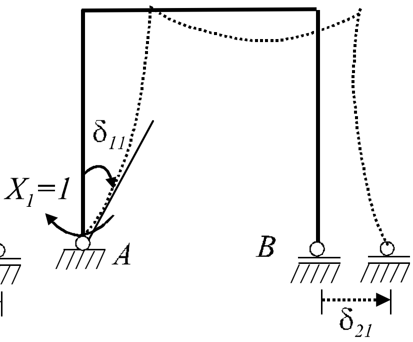
Hiperstatik sistemin yerdeğiştirmeleri ; δ_{ij}

Yer   Sebep

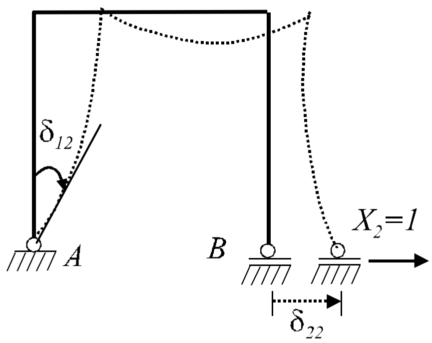
		X=0 Durumu	X_1=1 Durumu	X_2=1 Durumu
Kesit Zorları	:	M_0, N_0, T_0	M_1, N_1, T_1	M_2, N_2, T_2
Yerdeğiştirmeler	:	δ_{10}, δ_{20}	δ_{11}, δ_{21}	δ_{12}, δ_{22}



Dış yük durumu
(X=0 durumu)



X_1=1 Durumu



X_2=1 Durumu

Hiperstatik sistemin mesnetlerindeki geometrik uygunluk koşullarına göre φ_A=0 ve δ_B=0 dır. Bu denklemler izostatik esas sistemdeki yerdeğiştirmeler (δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22}) ve hiperstatik bilinmeyenler (X_1 , X_2) cinsinden süperpozisyon prensibi kullanılarak yazılabilir, (süreklilik denklemleri).

Süreklilik Denklemleri :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_A &= \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_B &= \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{aligned}}$$

İzostatik esas sitemdeki δ_{10} , δ_{20} , δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} yerdeğiştirmeleri Virtüel İş Teoremi ile hesaplanarak yukarıda verilen doğrusal denklem sistemi çözülür ve X_1 , X_2 hiperstatik bilinmeyenleri bulunur. Bu bilinmeyenler hesaplandıktan sonra süperpozisyon denklemleri kullanılarak hiperstatik sistemin M, N, T kesit zorları elde edilir.

Süperpozisyon Prensibi
Hiperstatik sistemin
M, N, T Kesit Zorları

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$$
$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2$$
$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2$$